

1.3 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Πολυώνυμο : Είναι το άθροισμα μονωνύμων εκ των οποίων δύο τουλάχιστον δεν είναι όμοια

2.

Όροι πολυωνύμου : Είναι τα μονώνυμα που το συγκροτούν.

3.

Διώνυμο – τριώνυμο : Το πολυώνυμο με δύο όρους όχι όμοιους το λέμε Διώνυμο.
Το πολυώνυμο με τρεις όρους όχι όμοιους ανά δύο το λέμε τριώνυμο.

4.

Βαθμός πολυωνύμου : Βαθμός του πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές ονομάζεται ο μεγαλύτερος βαθμός των όρων του.

5.

Συμφωνία : Κάθε αριθμός θεωρούμε ότι είναι πολυώνυμο το οποίο λέμε σταθερό και είναι μηδενικού βαθμού
Ειδικότερα ο αριθμός 0 λέγεται μηδενικό πολυώνυμο και δεν ορίζεται βαθμός για αυτό.

6.

Συμβολισμός : Τα πολυώνυμα που έχουν μία μεταβλητή τα ονομάζουμε με κεφαλαία συνήθως γράμματα γράφοντας δίπλα και μέσα σε παρένθεση το γράμμα της μεταβλητής.
Έτσι, για πολυώνυμα με μεταβλητή το x γράφουμε $P(x)$, $Q(x)$ κλπ
Αν μεταβλητή είναι το y γράφουμε $A(y)$, $B(y)$ κλπ

7.

Συμβολισμός : Για ένα πολυώνυμο $P(x)$, η αριθμητική του τιμή για $x = a$ γράφεται $P(a)$

8.

Φθίνουσες – αύξουσες δυνάμεις : Αν σ' ένα πολυώνυμο οι εκθέτες της μεταβλητής βαίνουν ελαττούμενοι – αυξανόμενοι, λέμε ότι το πολυώνυμο είναι διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες – αύξουσες δυνάμεις της μεταβλητής αυτής

9.

Αναγωγή ομοίων όρων : Είναι η αντικατάσταση των ομοίων μονωνύμων με το άθροισμά τους.

10.

Πρόσθεση – αφαίρεση πολυωνύμων : Όπως τους πραγματικούς αριθμούς.

11.

Ίσα πολυώνυμα : Ονομάζονται τα πολυώνυμα που οι όροι τους είναι ίσα μονώνυμα.

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Τελική μορφή πολυωνύμου : Είναι η μορφή που παίρνει το πολυώνυμο μετά την εκτέλεση των πράξεων και των αναγωγών.

2.

Κάτι για το βαθμό : Για να βρούμε το βαθμό ενός πολυωνύμου ως προς κάποια μεταβλητή, το πολυώνυμο πρέπει να είναι στην τελική του μορφή

3.

Σχετικά με την ισότητα : Εξετάζω τα της ισότητας δύο πολυωνύμων εφ' όσον αυτά είναι στην τελική τους μορφή

4.

Συμφωνία : Τα πολυώνυμα συνήθως τα φέρνουμε στην τελική τους μορφή και κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Στα παρακάτω πολυώνυμα να γίνει αναγωγή ομοίων όρων

α) $2x^4 - 3x^3 + x^2 - x^4 + x^2 - x^3$

β) $5x^3y - 2xy^3 + 7x^3y - xy^3 + 4x^3y - 6xy^3$

γ) $\alpha^2\beta^2 - 5\alpha\beta + 6\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta - 7\alpha\beta + 7\alpha^2\beta^2$

δ) $(-2x^2y^3) - (-3x^3y^2) + (+x^3y^2) - (-7x^2y^3) + (-x^2y^3)$

ε) $\left(-\frac{2}{3}xy^2\right) - \left(-\frac{1}{2}xy^2\right) + \left(-\frac{3}{2}x^2y\right) - \left(+\frac{1}{4}xy\right) - (x^2y) + (+2xy)$

στ) $3\alpha^2 - \beta^3 + 7\gamma - (3\alpha^2 - 5\gamma) - (-9\alpha^2 - \beta^3 + 3\gamma)$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$2x^4 - 3x^3 + x^2 - x^4 + x^2 - x^3 = x^4 - 4x^3 + 2x^2$$

Θεωρία 9

β)

$$5x^3y - 2xy^3 + 7x^3y - xy^3 + 4x^3y - 6xy^3 = 16x^3y - 9xy^3$$

γ)

$$\alpha^2\beta^2 - 5\alpha\beta + 6\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta - 7\alpha\beta + 7\alpha^2\beta^2 = 14\alpha^2\beta^2 - 11\alpha\beta$$

$$\begin{aligned} \delta) (-2x^2y^3) - (-3x^3y^2) + (+x^3y^2) - (-7x^2y^3) + (-x^2y^3) = \\ = -2x^2y^3 + 3x^3y^2 + x^3y^2 + 7x^2y^3 - x^2y^3 = 4x^2y^3 + 4x^3y^2 \end{aligned}$$

ε)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{3}xy^2\right) - \left(-\frac{1}{2}xy^2\right) + \left(-\frac{3}{2}x^2y\right) - \left(+\frac{1}{4}xy\right) - (x^2y) + (+2xy) = \\ = -\frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{3}{2}x^2y - \frac{1}{4}xy - x^2y + 2xy = \\ = -\frac{4}{6}xy^2 + \frac{3}{6}xy^2 - \frac{3}{2}x^2y - \frac{1}{4}xy - \frac{2}{2}x^2y + \frac{8}{4}xy = \\ = -\frac{1}{6}xy^2 - \frac{5}{2}x^2y + \frac{7}{4}xy \end{aligned}$$

στ)

$$\begin{aligned} 3\alpha^2 - \beta^3 + 7\gamma - (3\alpha^2 - 5\gamma) - (-9\alpha^2 - \beta^3 + 3\gamma) = \\ = 3\alpha^2 - \beta^3 + 7\gamma - 3\alpha^2 + 5\gamma + 9\alpha^2 + \beta^3 - 3\gamma = \\ = 3\alpha^2 + 9\gamma \end{aligned}$$

2.

Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις .

$$\alpha) 24\alpha - [(13\alpha - 8\beta + 2\gamma) - (9\alpha + 12\beta - 3\gamma)]$$

$$\beta) 4x^2 - [(7x^3 - 2x) + 9x^2 - (6x^2 + 5)] - (9x^3 + 4x - 6)$$

$$\gamma) \alpha^2 - (\beta^2 - \alpha\beta) + [2\beta^2 + 3\alpha\beta - (\alpha^2 + \beta^2)] - (-3\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta)$$

$$\delta) 7\alpha - \{-3\beta - [2\alpha + (4\alpha - 3\beta)] + (\alpha - 5\beta) - 2\alpha\}$$

$$\epsilon) 2\alpha^4 - [1 - (2\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha)] - \{- (5\alpha - 3) - 2 + [-3 - (-4\alpha^3 - 2)]\}$$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 9 -10

α)

$$\begin{aligned} 24\alpha - [(13\alpha - 8\beta + 2\gamma) - (9\alpha + 12\beta - 3\gamma)] &= 24\alpha - (13\alpha - 8\beta + 2\gamma - 9\alpha - 12\beta + 3\gamma) = \\ &= 24\alpha - 13\alpha + 8\beta - 2\gamma + 9\alpha + 12\beta - 3\gamma = \\ &= 20\alpha + 20\beta - 5\gamma \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} 4x^2 - [(7x^3 - 2x) + 9x^2 - (6x^2 + 5)] - (9x^3 + 4x - 6) &= \\ &= 4x^2 - (7x^3 - 2x + 9x^2 - 6x^2 - 5) - 9x^3 - 4x + 6 = \\ &= 4x^2 - 7x^3 + 2x - 9x^2 + 6x^2 + 5 - 9x^3 - 4x + 6 = \\ &= -16x^3 + x^2 - 2x + 11 \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} \alpha^2 - (\beta^2 - \alpha\beta) + [2\beta^2 + 3\alpha\beta - (\alpha^2 + \beta^2)] - (-3\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta) &= \\ &= \alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta + (2\beta^2 + 3\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2) + 3\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta = \\ &= \alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta + 2\beta^2 + 3\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta = \\ &= -\alpha^2 + 3\beta^2 + 6\alpha\beta \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned} 7\alpha - \{-3\beta - [2\alpha + (4\alpha - 3\beta)] + (\alpha - 5\beta) - 2\alpha\} &= 7\alpha - \{-3\beta - 2\alpha - 4\alpha + 3\beta + \alpha - 5\beta - 2\alpha\} = \\ &= 7\alpha + 3\beta + 2\alpha + 4\alpha - 3\beta - \alpha + 5\beta + 2\alpha = \\ &= 14\alpha + 5\beta \end{aligned}$$

ε)

$$\begin{aligned} 2\alpha^4 - [1 - (2\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha)] - \{- (5\alpha - 3) - 2 + [-3 - (-4\alpha^3 - 2)]\} &= \\ &= 2\alpha^4 - [1 - 2\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha] - \{-5\alpha + 3 - 2 + [-3 + 4\alpha^3 + 2]\} = \\ &= 2\alpha^4 - 1 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha - \{-5\alpha + 3 - 2 - 3 + 4\alpha^3 + 2\} = \\ &= 2\alpha^4 - 1 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha + 5\alpha - 3 + 2 + 3 - 4\alpha^3 - 2 = \\ &= 2\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 1 \end{aligned}$$

3.Έστω $A = y^3 + x^3 - 3x^2y + xy^2 + 1$ **α)** Να βρείτε την αριθμητική τιμή του A όταν $x = -1$ και $y = 2$ **β)** Να διατάξετε το A κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του y **γ)** Να βρείτε τον βαθμό του A ως προς x και ως προς xy **Προτεινόμενη λύση**

Θεωρία 4 -8

α)

$$A = 2^3 + (-1)^3 - 3(-1)^2 \cdot 2 + (-1) \cdot 2^2 + 1 = 8 - 1 - 6 - 4 + 1 = -2$$

β)

$$A = y^3 + xy^2 - 3x^2y + x^3 + 1$$

γ)Ο βαθμός ως προς x είναι $3^{\text{ος}}$ και ως προς xy πάλι $3^{\text{ος}}$ **4.**Αν $P(x) = 2x^2 + 5x - 7$ δείξτε ότι

$$\alpha) 2P(-1) + P(3) = 6 \quad \beta) P(1) = P\left(-\frac{7}{2}\right)$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$P(-1) = 2(-1)^2 + 5(-1) - 7 = 2 - 5 - 7 = -10$$

$$P(3) = 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 7 = 18 + 15 - 7 = 26$$

$$\text{Άρα } 2P(-1) + P(3) = 2(-10) + 26 = -20 + 26 = 6$$

β)

$$P(1) = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 7 = 2 + 5 - 7 = 0 \quad (1)$$

$$P\left(-\frac{7}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - 7 = 2 \cdot \frac{49}{4} - \frac{35}{2} - 7 = \frac{49}{2} - \frac{35}{2} - \frac{14}{2} = 0 \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1) και (2) βλέπουμε ότι } P(1) = P\left(-\frac{7}{2}\right)$$

5.Αν $P(x) = (-3x^2 + 2x - 1) - (-3x + x^2 + 4) + (2x - 3)$ και $Q(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, να βρείτε τις τιμές των α , β , γ ώστε να είναι $P(x) = Q(x)$ **Προτεινόμενη λύση**Θεωρία 11
Σχόλιο 3

$$\begin{aligned} P(x) &= (-3x^2 + 2x - 1) - (-3x + x^2 + 4) + (2x - 3) = \\ &= -3x^2 + 2x - 1 + 3x - x^2 - 4 + 2x - 3 = \\ &= -4x^2 + 7x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } P(x) &= Q(x) \text{ όταν } -4x^2 = ax^2 \text{ και } 7x = \beta x \text{ και } \gamma = -8 \\ \text{δηλαδή όταν } \alpha &= -4 \text{ και } \beta = 7 \text{ και } \gamma = -8 \end{aligned}$$

6.

Αν $P(x) = 4x^2 - 3x$ και $Q(x) = 36x^2 + 9x$, δείξτε ότι $P(3x) - Q(-x) = 0$

Προτεινόμενη λύση

$$P(3x) = 4(3x)^2 - 3(3x) = 4 \cdot 9x^2 - 9x = 36x^2 - 9x$$

$$Q(-x) = 36(-x)^2 + 9(-x) = 36x^2 - 9x$$

$$\text{Οπότε } P(3x) - Q(-x) = (36x^2 - 9x) - (36x^2 - 9x) = 0$$

7.

Για τις διάφορες τιμές του λ να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου

$$P(x) = (\lambda^2 - 4)x^4 + (\lambda - 2)x^3 + (\lambda + 2)x^2 - 5x + 6$$

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $\lambda^2 - 4 \neq 0$, δηλαδή όταν $\lambda^2 \neq 4$
 $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$
 το πολυώνυμο είναι 4^{ου} βαθμού
- Όταν $\lambda = 2$, τότε $P(x) = (2^2 - 4)x^4 + (2 - 2)x^3 + (2 + 2)x^2 - 5x + 6$
 $P(x) = 4x^2 - 5x + 6$
 το οποίο είναι 2^{ου} βαθμού
- Όταν $\lambda = -2$ τότε $P(x) = [(-2)^2 - 4]x^4 + (-2 - 2)x^3 + (-2 + 2)x^2 - 5x + 6 =$
 $P(x) = -4x^3 - 5x + 6$
 το οποίο είναι 3^{ου} βαθμού

8.

Αν $P(x) = x^3 - 3x + 2$ να βρείτε το πολυώνυμο $Q(x) = P(2x) - P(-x^2) + P(2)$ και τον βαθμό του.

Προτεινόμενη λύση

$$P(2x) = (2x)^3 - 3(2x) + 2 = 8x^3 - 6x + 2$$

$$P(-x^2) = (-x^2)^3 - 3(-x^2) + 2 = -x^6 + 3x^2 + 2$$

$$P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 8 - 6 + 2 = 4$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } Q(x) &= 8x^3 - 6x + 2 - (-x^6 + 3x^2 + 2) + 4 = \\ &= 8x^3 - 6x + 2 + x^6 - 3x^2 - 2 + 4 = \\ &= x^6 + 8x^3 - 3x^2 - 6x + 4 \end{aligned}$$

Το $Q(x)$ είναι 6^{ου} βαθμού

9 .

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ που αν το αφαιρέσουμε από το $Q(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 5$ να βρούμε το $x^2 + x + 1$

Προτεινόμενη λύση

Θέλουμε να ισχύει $Q(x) - P(x) = x^2 + x + 1$ άρα

$$Q(x) - (x^2 + x + 1) = P(x)$$

$$(-2x^3 + 3x^2 - x + 5) - (x^2 + x + 1) = P(x)$$

$$-2x^3 + 3x^2 - x + 5 - x^2 - x - 1 = P(x)$$

$$-2x^3 + 2x^2 - 2x + 4 = P(x)$$

$$P(x) = -2x^3 + 2x^2 - 2x + 4$$

netsuccess.gr